Comportement asymptotique de la solution d'une équation d'évolution non-linéaire avec un retard distribué

SABBAGH Zineb

Option : EDP et Applications

Tuniso-Lebanese Workshop in Control Theory and Related Fields

USTHB, 30 Octobre 2019

Plan de travail

Plan de travail

Question

Comment peut-on définir un système à retard ?

Les systèmes à retard

- Les systèmes à retard sont des systèmes qui apparaissent naturellement dans les processus physiques. Parmi les principales sources induisant des retards :

Les systèmes à retard

- Les systèmes à retard sont des systèmes qui apparaissent naturellement dans les processus physiques. Parmi les principales sources induisant des retards :

  $\rightarrow$ les temps de réactions des capteurs ou des actionneurs

Les systèmes à retard

- Les systèmes à retard sont des systèmes qui apparaissent naturellement dans les processus physiques. Parmi les principales sources induisant des retards :

  $\rightarrow$ les temps de réactions des capteurs ou des actionneurs

  $\rightarrow$les temps de transmission des informations

Les systèmes à retard

- Les systèmes à retard sont des systèmes qui apparaissent naturellement dans les processus physiques. Parmi les principales sources induisant des retards :

  $\rightarrow$ les temps de réactions des capteurs ou des actionneurs

  $\rightarrow$les temps de transmission des informations

  $\rightarrow$ les temps de transfère des matières ...

Les systèmes à retard

- L'étude de l'évolution des systèmes à retard consiste à mémoriser une partie de l'histoire $\rightarrow$ parce que ces systèmes dépendent de la variable d'état à l'instant présent t et aussi d'une partie des valeurs passées.

L'effet de retard

- Le retard peut être la cause d'instabilités : un retard arbitrairement petit peut déstabiliser un système. Mais, a contrario, un retard peut aussi améliorer la performance du système.

L'effet de retard

- Le retard peut être la cause d'instabilités : un retard arbitrairement petit peut déstabiliser un système. Mais, a contrario, un retard peut aussi améliorer la performance du système.
- Les phénomènes de retard apparaissent dans de nombreuses applications : en biologie, en mécanique ou encore en automatique.

Le modèle étudié

1. **Équation du système**

$$|u_t|^l u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t h(t-\sigma)\Delta^2 u(x,\sigma)\, d\sigma$$

$$+\mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x,t-s)ds = 0, \text{ dans } \Omega \times]0,\infty[.$$

Le modèle étudié

1. Équation du système

$$|u_t|^l u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t h(t-\sigma)\Delta^2 u(x,\sigma)\, d\sigma$$

$$+\mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t-s) ds = 0, \text{ dans } \Omega \times]0, \infty[.$$

- Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière Γ.
- $u(x,t)$: la flexion de la plaque en x à l'instant t.
- Δu_{tt} : représente une dispersion.
- $|u_t|^l$: la densité du matériau viscoélastique où $l > 0$.
- **On remarque que $|u_t|^l u_{tt}$ est un terme non linéaire.**

Le modèle étudié

- $\int_0^t h(t-\sigma)\,\Delta^2 u(x,\sigma)\,d\sigma$: est un terme de mémoire dissipatif, où $h(t)$ est une fonction de relaxation.
- $\mu_1 u_t$: une dissipation structurelle, μ_1 est une constante positive.

Le modèle étudié

- $\int_0^t h(t-\sigma)\,\Delta^2 u(x,\sigma)\,d\sigma$: est un terme de mémoire dissipatif, où $h(t)$ est une fonction de relaxation.
- $\mu_1 u_t$: une dissipation structurelle, μ_1 est une constante positive.
- $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t-s) ds$: représente un retard distribué, où $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}$: fonction bornée, où τ_1, τ_2 sont deux réels strictements positifs $(\tau_1 < \tau_2)$.

Le modèle étudié

2. Les conditions aux limites :

$$u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0,+\infty[\,,$$

ν : la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.

Le modèle étudié

2. Les conditions aux limites :

$$u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0,+\infty[\,,$$

ν : la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.

3. Les conditions initiales :

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega.$$

Le modèle étudié

2. Les conditions aux limites :

$$u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0,+\infty[\,,$$

ν : la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.

3. Les conditions initiales :

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega.$$

4. Condition sur l'historique de la vitesse :

Le retard $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x,t-s)ds$ nécessite la connaissance de la vitesse $u_t(x,t)$ pour $t < 0$:

$$u_t(x,-t) = f_0(x,t), \text{ dans } \Omega \times]0,\tau_2[\,, \text{ où } f_0 \text{ est donnée.}$$

Plan de travail

Changement de fonction

On utilise le changement de fonction suivant :

$$z(x, \rho, s, t) = u_t(x, t - \rho s) \quad \text{où } (x, \rho, s, t) \in \Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty).$$

Changement de fonction

On utilise le changement de fonction suivant :

$$z(x,\rho,s,t) = u_t(x, t-\rho s) \quad \text{où } (x,\rho,s,t) \in \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2) \times (0,\infty).$$

Il est facile de vérifier que z satisfait à :

$$sz_t + z_\rho = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2) \times (0,\infty);$$

où s est un paramètre.

Problème équivalent

Par conséquent, on a le problème équivalent suivant :

$$
(P)\begin{cases}
|u_t|^l u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_{tt} - \int_0^t h(t-\sigma)\Delta^2 u(\sigma)d\sigma + \mu_1 u_t(x,t) \\
+\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x,1,s,t)ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0,+\infty[\,, \\
s z_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2) \times (0,\infty) \\
z(x,0,s,t) = u_t(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times (0,\infty), \\
u(x,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \Gamma \times (0,+\infty)\,, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \ \text{ sur } \Omega, \\
z(x,\rho,s,0) = f_0(x,\rho s), \quad \text{sur } \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2).
\end{cases}
$$

Hypothèses sur h et la condition de dissipativité

(H1) La fonction de relaxation h est de classe $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante, vérifiant $h(0) > 0$ et de plus :

$$1 - \int_0^\infty h(\sigma)\, d\sigma = 1 - \beta > 0.$$

Hypothèses sur h et la condition de dissipativité

(H1) La fonction de relaxation h est de classe $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante, vérifiant $h(0) > 0$ et de plus :

$$1 - \int_0^\infty h(\sigma)\, d\sigma = 1 - \beta > 0.$$

(H2) Il existe une constante positive ς telle que

$$h'(t) \leq -\varsigma h(t).$$

Hypothèses sur h et la condition de dissipativité

(H1) La fonction de relaxation h est de classe $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante, vérifiant $h(0) > 0$ et de plus :

$$1 - \int_0^\infty h(\sigma)\, d\sigma = 1 - \beta > 0.$$

(H2) Il existe une constante positive ς telle que

$$h'(t) \leq -\varsigma h(t).$$

(H3) Pour montrer que l'énergie est décroissante, on suppose que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds < \mu_1.$$

Energie du système viscoélastique

L'énergie associée au système (P) est donnée par :

$$\begin{aligned} E(t) \;=\; & \frac{1}{l+2}||u_t||_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(\sigma)\,d\sigma\right)||\Delta u||_2^2 \\ & + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx \\ & + \frac{1}{2}(h\Box\Delta u)(t) + \frac{1}{2}||\nabla u_t||_2^2. \end{aligned}$$

Energie du système viscoélastique

L'énergie associée au système (P) est donnée par :

$$
\begin{aligned}
E(t) \quad = \quad & \frac{1}{l+2}||u_t||_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma\right)||\Delta u||_2^2 \\
& + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x,\rho,s,t)\, ds\, d\rho\, dx \\
& + \frac{1}{2}(h \Box \Delta u)(t) + \frac{1}{2}||\nabla u_t||_2^2.
\end{aligned}
$$

où

$$
(h\Box\Delta u)(t) = \int_0^t h(t-\sigma)\|\Delta u(t) - \Delta u(\sigma)\|_2^2\, d\sigma.
$$

et ξ est une constante positive choisie telle que

$$
\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, ds + \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} < \mu_1. \tag{2.1}
$$

Décroissance de l'énergie

Lemme

Soit (u,z) une solution du système (P) ; on suppose que (H1)-(H3) et la condition (2.1) sont vérifiées. Alors on a

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|ds - \frac{\xi(\tau_2-\tau_1)}{2}\right)||u_t||_2^2 \\ &\quad -\frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t)\,dsdx \\ &\quad -\frac{1}{2}h(t)\,||\Delta u||_2^2 + \frac{1}{2}(h'\Box\Delta u)(t) \quad \text{pour tout } t>0. \end{aligned}$$

On voit que $E'(t) \leq 0$, c'est à dire l'énergie est décroissante.

Résultat d'existence

Théorème (Exixtence globale d'une solution faible)

On suppose que $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$ et $f_0 \in L^2(\Omega, H^2(0,\tau_2)) \cap H^2(\Omega, L^2(0,\tau_2))$ satisfaisant à la condition de compatibilité $f_0(.,0) = u_1$; alors le problème (P) admet une solution faible globale

$$\begin{array}{rcl} u & \in & L^\infty\left([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right), \\ u_t & \in & L^\infty\left([0,\infty); H_0^2(\Omega)\right), \\ u_{tt} & \in & L^2\left([0,\infty); H_0^1(\Omega)\right), \\ z & \in & L^\infty\left([0,\infty); H^1(\Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2))\right) \end{array}$$

Pour la démostration, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin.

Idée de la démonstration

Méthode de Faedo-Galerkin

- Chercher des solutions "approchées" dans des espaces de dimension finie.
- Etablir des estimations a priori sur ces solutions.
- Faire un passage à la limite, grâce à des propriétés de compacité (dans les termes non linéaires).

Plan de travail

Résultat de stabilité

Théorème (Stabilité exponentielle)

Sous les hypothèses (H1)-(H3) l'énergie $E(t)$ associée au problème (P) décroit exponentiellement vers zéro : il existe deux constantes positives k_0 et k_1 telles que :

$$E(t) \leq k_0 e^{-k_1 t}, \quad \text{pour tout } t > 0,$$

où

- k_1 est le taux de décroissance de l'énergie.

Résultat d'équivalence

- On utilise la méthode de Lyapunov qui consiste à trouver une fonctionnelle $\mathcal{L}$ qui doit vérifier :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t), \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Résultat d'équivalence

- On utilise la méthode de Lyapunov qui consiste à trouver une fonctionnelle $\mathcal{L}$ qui doit vérifier :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t), \quad \text{pour tout } t > 0.$$

- Pour passer à l'estimation de $E(t)$, nous aurons besoin d'une relation d'équivalence entre $\mathcal{L}(t)$ et $E(t)$.

Lemme d'équivalance

Il existe deux constantes positives α_1, α_2 telles que :

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t).$$

Fonctionnelle de Lyapunov

On considère la fonctionnelle de Lyapunov sous la forme

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1 F_1(t) + F_2(t) + N_2 F_3(t)$$

où

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= \frac{1}{l+1}\int_\Omega |u_t|^l u_t u \, dx + \int_\Omega \nabla u_t \nabla u \, dx, \\
F_2(t) &= \int_\Omega \left(\Delta u_t - \frac{1}{l+1}|u_t|^l u_t \right) \int_0^t h(t-\sigma)(u(t)-u(\sigma)) \, d\sigma \, dx, \\
F_3(t) &= \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho}(|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x,\rho,s,t) \, ds \, d\rho \, dx.
\end{aligned}$$

Les coefficients N, N_1 et N_2 sont des constantes positives qui seront choisies par la suite.

Estimations des fonctionnelles

$$F_1'(t) \leq \frac{1}{l+1}||u_t||_{l+2}^{l+2} - \left(1 - \beta - \eta - \frac{2\eta C_s^2}{\lambda_1}\mu_1\right)||\Delta u||_2^2$$

$$+ \left(1 + \frac{C_s^2 \mu_1}{4\eta}\right)||\nabla u_t||_2^2 0 + \frac{\beta}{4\eta}\,(h\Box\Delta u)\,(t)$$

$$+ \frac{1}{4\eta}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx, \quad \eta > 0$$

Estimations des fonctionnelles

$$F_2'(t) \le \delta(2\beta^2+1)||\Delta u||_2^2 + (\delta + \frac{\delta a_0}{l+1} - h_0)||\nabla u_t||_2^2 - \frac{1}{l+1} h_0 ||u_t||_{l+2}^{l+2}$$
$$+ \beta(2\delta + \frac{1}{4\delta} + \frac{\mu_1 C_s^2}{2\delta\lambda_1})(h\Box\Delta u)(t) - \frac{h(0)}{4\delta\lambda_1}(1 + \frac{C_s^2}{l+1})(h'\Box\Delta u)(t)$$
$$+ \mu_1\delta \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x,1,s,t)\, ds\, dx + \mu_1\delta ||u_t||_2^2.$$

Estimations des fonctionnelles

$$
\begin{aligned}
F_2'(t) \leq{}& \delta(2\beta^2+1)||\Delta u||_2^2 + (\delta + \frac{\delta a_0}{l+1} - h_0)||\nabla u_t||_2^2 - \frac{1}{l+1} h_0 ||u_t||_{l+2}^{l+2} \\
&+ \beta(2\delta + \frac{1}{4\delta} + \frac{\mu_1 C_s^2}{2\delta\lambda_1})(h\square\Delta u)(t) - \frac{h(0)}{4\delta\lambda_1}(1+\frac{C_s^2}{l+1})(h'\square\Delta u)\,(t) \\
&+ \mu_1\delta \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx + \mu_1\delta||u_t||_2^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3'(t) \quad \leq \quad & -m \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)|+\xi) z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx + \mu_1||u_t||_2^2 \\
& -m \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s(|\mu_2(s)|+\xi) z^2(x,\rho,s,t)\,d\rho\,ds\,dx,
\end{aligned}
$$

où $m = e^{-\tau_2}$.

Estimation de la fonctionnelle de Lyapunov

Les estimations sur $E'(t)$ et $F_i'(t)$ $i = \overline{1,3}$ nous premettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) \leq & -\gamma_1 \|u_t\|_{l+2}^{l+2} - \gamma_2 \|\nabla u_t\|_2^2 - \gamma_3 \|\Delta u\|_2^2 - \gamma_4 (h \square \Delta u)(t) \\ & - \gamma_5 \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s(|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x,\rho,s,t)\, d\rho\, ds\, dx,\end{aligned}$$

où les coefficients γ_i, $i = \overline{1,5}$ peuvent être choisis positifs par un choix judicieux de N, N_1, N_2.

Estimation de la fonctionnelle de Lyapunov

Les estimations sur $E'(t)$ et $F_i'(t)$ $i=\overline{1,3}$ nous premettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) \leq & -\gamma_1 \|u_t\|_{l+2}^{l+2} - \gamma_2 \|\nabla u_t\|_2^2 - \gamma_3 \|\Delta u\|_2^2 - \gamma_4 (h \Box \Delta u)(t) \\ & - \gamma_5 \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s(|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x,\rho,s,t)\, d\rho\, ds\, dx,\end{aligned}$$

où les coefficients γ_i, $i=\overline{1,5}$ peuvent être choisis positifs par un choix judicieux de N, N_1, N_2.

Cette estimation premet de montrer que :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -cE\,(t)\,, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

En utilisant le résultat d'équivalence de l'energie, ce qui donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k_1 \mathcal{L}(t), \quad \text{où } k_1 = \frac{\alpha}{\alpha_1}.$$

En intégrant cette estimation sur $[0, t]$, on aura :

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)\, e^{-k_1 t}, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

En utilisant le résultat d'équivalence de l'energie, ce qui donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k_1 \mathcal{L}(t), \quad \text{où } k_1 = \frac{\alpha}{\alpha_1}.$$

En intégrant cette estimation sur $[0, t]$, on aura :

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-k_1 t}, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

ce qui implique

$$E(t) \leq k_0 e^{-k_1 t}, \quad \text{où } k_0 = \frac{\alpha_1 E(0)}{\alpha_0}.$$

Bibliographie

- M. M. Cavalcanti , V. N. Domingos Cavalcanti and J. Ferreira, *Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic quation with strong damping*, Math. Meth. Appl. Sci. 2001 ; 24 :1043–1053 (DOI : 10.1002/mma.250).
- S. A. Messaoudi and N. E. Tatar, *Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 30 (6) : p. 665-680, 2007.
- N. Mezouar, M. Abdelli and A. Rachah, *Existence of global solutions and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with a delay term in the non-linear internal feedback*, EJDE Vol. **2017**, No. 58, pp. 1-25, 2017.
- M.I Mustafa, M. Kafini *Energy decay for viscoelastic plates with distributed delay and source term* , Z. Angew. Math. Phys. **67**, 35-78, 2016.

Bibliographie

- S. Nicaise and C. Pignotti. *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*. SIAM J. Control Optim. 45(5) :1561–1585, 2006.
- S. Nicaise, C. Pignotti, *Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay*, Differential Integral Equations **21** (9-10), 935-958, 2008.
- Z. Sabbagh, A. Khemmoudj, M. Ferhat, M. Abdelli, *Existence of global solutions and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with internal distributed delay*, Rendiconti del Circolo di Palermo Series 2 . Doi : 10.1007/s12215-018-0373-7, 2018.
- Z. Yang, *Existence and energy decay of solutions for the Euler Bernoulli viscoelastic equation with a delay* , Z. Angew. Math. Phys. **66**, 727-745, 2015.

Merci pour votre attention