

Contrôlabilité à zéro avec Contraintes sur le Contrôle

Tuniso-Libanese workshop in Control Theory and Related Fields

DR. REZZOUG IMAD

Université Larbi Ben Mhidi d'Oum El Bouaghi
Département de Mathématiques et Informatiques
Laboratoire des systèmes dynamiques et contrôle

Monastir, 30-31 Octobre 2019

Plan

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

1 Introduction

2 Sentinelle de J.L.Lions

3 Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle

4 Références

5 Remerciements

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

La méthode des sentinelles pour les systèmes distribués, développée par J.L.Lions pour l'estimation du terme de pollution d'un système à données manquantes. Telles que: les sentinelles sont construit à partir de l'existence de la contrôlabilité d'un système adjoint. Et la recherche des sentinelles se conduit généralement à un problème de minimisation sur un sous-espace affine fermé dans un espace de Hilbert.

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

On considère des systèmes distribués à données manquantes (terme de pollution et terme manquant).

Par exemple:

- **Météorologie:** Pollution de l'air; on ne connaît jamais la donnée initiale!

Pour l'estimation de la pollution des systèmes distribués à paramètres inconnu

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

On considère des systèmes distribués à données manquantes (terme de pollution et terme manquant).

Par exemple:

- **Météorologie:** Pollution de l'air; on ne connaît jamais la donnée initiale!
- **L'identification de la pollution dans une rivière** (soit: Les Pollution Biologique, Pollution Chimique, Pollution Physique).

Pour l'estimation de la pollution des systèmes distribués à paramètres inconnu

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

On considère des systèmes distribués à données manquantes (terme de pollution et terme manquant).

Par exemple:

- **Météorologie:** Pollution de l'air; on ne connaît jamais la donnée initiale!
- **L'identification de la pollution dans une rivière** (soit: Les Pollution Biologique, Pollution Chimique, Pollution Physique).

Pour l'estimation de la pollution des systèmes distribués à paramètres inconnu

- On propose la méthode de **Sentinelle**. Donc, on montre que le problème de l'existence de la sentinelle est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro". Telle que

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

- **Problèmes de Sentinelles** “l’estimation du terme de pollution” \equiv Contrôlabilité \equiv Minimisation.

La Sentinelle de J.L.Lions. Elle est basé sur les considérations suivantes

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

- **Problèmes de Sentinelles** “l’estimation du terme de pollution” \equiv Contrôlabilité \equiv Minimisation.
- **Contrôlabilité:** Contrôlabilité à zéro.

La Sentinelle de J.L.Lions. Elle est basé sur les considérations suivantes

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

- **Problèmes de Sentinelles** “l’estimation du terme de pollution” \equiv Contrôlabilité \equiv Minimisation.
- **Contrôlabilité:** Contrôlabilité à zéro.

La Sentinelle de J.L.Lions. Elle est basé sur les considérations suivantes

- une équation d’état avec des données manquantes,

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

- **Problèmes de Sentinelles** “l’estimation du terme de pollution” \equiv Contrôlabilité \equiv Minimisation.
- **Contrôlabilité:** Contrôlabilité à zéro.

La Sentinelle de J.L.Lions. Elle est basé sur les considérations suivantes

- une équation d’état avec des données manquantes,
- un système d’observations,

Introduction

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

- **Problèmes de Sentinelles** “l’estimation du terme de pollution” \equiv Contrôlabilité \equiv Minimisation.
- **Contrôlabilité:** Contrôlabilité à zéro.

La Sentinelle de J.L.Lions. Elle est basé sur les considérations suivantes

- une équation d’état avec des données manquantes,
- un système d’observations,
- une fonction dite “sentinelle”.

Remarques sur les Sentinelles

Position du problème

Soit le système à donnée manquantes (Pollution dans un système à donnée manquantes)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = \zeta + \lambda \hat{\zeta} & \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times]0, T[, \\ y(0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[. \end{cases} \quad (1)$$

Où

- Les termes $\lambda \hat{\zeta}$ (dit de pollution) et $\tau \hat{y}_0$ (dit manquant) ne sont pas connus.

Les fonctions ζ et $\hat{\zeta}$ sont dans $L^2(\mathcal{Q})$.

Les fonctions y_0 et \hat{y}_0 sont dans $L^2(\Omega)$.

On suppose que l'observation réalisée est $y\chi_{\mathcal{O}}$ où $\chi_{\mathcal{O}}$ est l'indicatrice de \mathcal{O} . "L'ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$ est l'observation on doit considérer que \mathcal{O} est "petit "".

Remarques sur les Sentinelles

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Les paramètres λ et τ sont inconnus et vérifiant: $|\lambda| < 1$ et $|\tau| < 1$.

La fonction $\widehat{\zeta}$ est inconnue et vérifie

$$\|\widehat{\zeta}\|_{L^2(Q)} \leq 1 \quad (2)$$

La fonction \widehat{y}_0 est inconnue et vérifie

$$\|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \quad (3)$$

Les fonctions $\zeta \in L^2(Q)$ et $y_0 \in L^2(\Omega)$ sont connues.

■ Pour estimer le terme de pollution ... En propose

Remarques sur les Sentinelles

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

- La méthode des Moindres carrés: Déterminer $\{\lambda\hat{\xi}, \tau\hat{y}_0\}$ ensemble. Donc:

On ne peut pas séparer les termes de pollution et manquante!
... NON (selon moi)

Comment obtenir $\lambda\hat{\xi}$ indépendamment de $\tau\hat{y}_0$? ... Pour cela, nous utilisons la méthode de

Remarques sur les Sentinelles

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelles de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

- La méthode des Moindres carrés: Déterminer $\{\lambda\hat{\xi}, \tau\hat{y}_0\}$ ensemble. Donc:

On ne peut pas séparer les termes de pollution et manquante!
... NON (selon moi)

Comment obtenir $\lambda\hat{\xi}$ indépendamment de $\tau\hat{y}_0$? ... Pour cela, nous utilisons la méthode de

- Sentinelles de Lions (Masson 1992)

Remarques sur les Sentinelles

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Définition

Soit h une fonction donnée avec $h \in \mathcal{U} = L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$

Il existe une fonction de contrôle u à déterminer avec $u \in \mathcal{U}$

On considère la fonctionnelle

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int_{\mathcal{U}} (h + u) y(x, t; \lambda, \tau) dx dt \quad (4)$$

Réalise

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0 \quad (5)$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ min.} \quad (6)$$

Remarques sur les Sentinelles

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

La condition $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0$ est naturelle. Elle exprime que la sentinelle n'est pas affectée (au premier ordre!) par l'absence d'informations sur les termes manquants. Et la condition $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \min$ exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne (la fonction h vérifie: $h \geq 0$ et $\int_{\mathcal{U}} h dx dt = 1$ alors $\int_{\mathcal{U}} h y(x, t; \lambda, \tau) dx dt$ est une moyenne). Donc, elle exprime que l'on "s'éloigne le moins possible" (au sens L^2) de h .

Nous avons donc les hypothèses suivantes:

(H-1): le problème (1) possède une solution unique, différentiable par rapport aux paramètres λ, τ .

(H-2): On dispose de la solution $y(x, T; \lambda, \tau)$ de (1) sur tout Ω mais à l'instant final T seulement.

(H-3): Les conditions du théorème de Mizohata sont vérifiées pour l'opérateur $-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ dans \mathcal{Q} . On introduit l'opérateur linéaire $\phi : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\mathcal{U})$ par $y(\cdot, 0) \longmapsto y\chi_u$ où y est la solution de (1) de condition initiale $y(\cdot, 0)$. Le théorème de Mizohata montre que l'opérateur ϕ^* est injectif. Et son opérateur adjoint ϕ^* est donné par $\phi^* : L^2(\mathcal{U}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ par $h + u \longmapsto q(\cdot, 0)$.

**Kernevez (1997), Nakoulima (CRAS 2004),
Miloudi-Nakoulima-Omrane (IPSE 2008).**

L'état Adjoint

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Notre but maintenant est de transformer (4), (5) et (6) en introduisant l'état adjoint.

Soit q l'état adjoint solution du problème rétrograde

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q = (h + u) \chi_O & \text{dans } Q, \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (7)$$

On remarque que, l'équation de la chaleur est linéaire, il nous suffit de regarder la contrôlabilité à zéro.

Contrôlabilité à zéro

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

La proposition suivante donne une caractérisation de la condition (5) et (6).

Proposition

La condition d'insensibilité de la sentinelle par rapport au terme manquant (5) est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro, c'est à dire $\exists u \in L^2(\mathcal{U})$ tel que si q est solution de (7), alors on a

$$q(0) = q(x, 0; u) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (8)$$

Contrôle optimal

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

On considère le système (7) et on se donne une fonction coût

$$J_\epsilon(u, q) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \left\| -\frac{\partial}{\partial t} q - \Delta q - (h + u) \chi_{\mathcal{O}} \right\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2. \quad (9)$$

Le contrôle optimal du système (7)-(9) consiste à trouver un couple contrôle-état $(\hat{u}, \hat{q}) \in L^2(\mathcal{U}) \times L^2(\mathcal{Q})$ solution du problème de minimisation

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min J_\epsilon(u, q) \\ (u, y) \text{ vérifiant (7) et (8).} \end{cases} \quad (10)$$

Equivalence entre le problème de sentinelle et le problème de contrôlabilité

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

On cherche donc u tel que si $q = q(x, t, u)$ est la solution de (7) on a

$$\left\{ \begin{array}{l} q(0, u) = 0, \\ \|u\|_{L^2(\mathcal{U})} = \min. \end{array} \right. \quad (11)$$

Remarque

◆ Telle que la solution n'est pas donnée par $h + u \equiv 0$ sinon la sentinelle est nulle. "donc aucune information donné sur les termes de pollution".

◆ Pour que les conditions (4), (5) et (6) soient satisfaites il suffit qu'il existe une fonction $u \in L^2(\mathcal{U})$ telle que $(q(0), \hat{y}_0) = 0$.

Construction de la sentinelle

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Pour cela on décompose le système (7) en deux systèmes

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q_0 - \Delta q_0 = h\chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_0(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q_0(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (12)$$

et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} z - \Delta z = u\chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } \mathcal{Q} \\ z(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (13)$$

donc $q = q(h) = q + z$ telle que q_0 est donc donnée.

Construction de la sentinelle

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Alors on cherche u de façon que $z = z(u)$ qui vérifie

$$\begin{cases} z(0, u) = -q_0(0) \\ \|u\|_{L^2} = \min \end{cases} \quad (14)$$

si l'on considère ici que

$$\begin{cases} u = \text{fonction de contrôle.} \\ z = z(u) = \text{étant d'un (nouveau) système.} \end{cases} \quad (15)$$

Alors (14) est un problème de contrôlabilité, on cherche u qui conduise l'état de 0 (à l'instant initial $t = T$) jusqu'à $-q_0(0)$ (à l'instant final $t = 0$) et ceci avec des conditions sur u , au sens (6).

Estimation du terme de pollution

Identification des paramètres λ

Pour estimer le paramètre λ , on procède comme suit

$$\mathcal{S}_{obs}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) \simeq \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0), \text{ car } \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0. \quad (16)$$

Théorème

Donc, le système (13) est contrôlable dans $L^2(\mathcal{O})$ alors on a

$$\lambda \int_{\mathcal{U}} q \widehat{\xi} dx dt = \int_{\mathcal{U}} (h + u) (y_m(x, t) - y_0(x, t)) dx dt \quad (17)$$

Où $y_0 = y(0, 0)$ est la solution du problème (1) quand $\lambda = \tau = 0$ et $y_m(x, t)$ est l'état observé sur \mathcal{O} pendant l'intervalle du temps $(0, T)$.

Ainsi cette estimation fournit des informations sur le terme de pollution λ si le contrôle u est connu.

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Etude de la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle

Il est clair que l'existence de la sentinelle est équivalente au problème de minimisation suivant

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}, \\ u \in \Lambda \end{cases} \quad (18)$$

Avec,

$$\Lambda = \{(\hat{u}, \hat{q} = q(x, t, \hat{u})) \text{ vérifie (10)}\} \quad (19)$$

Λ domaine des contraintes “non vide” ce qui justifie l'existence de la sentinelle insensible par rapport aux termes manquants. L'outil essentiel pour résoudre le problème d'existence est une inégalité d'observabilité (**de Carleman**).

- Grâce à l'inégalité de Carleman le problème (\mathcal{P}) admet une solution unique.

Construction de la sentinelle à données sensibles

- Pour obtenir le système d'optimalité pour le couple optimal (\hat{u}, \hat{q}) on utilise la méthode classique de pénalisation.

Théorème

Soit \hat{q} est la solution de (10) correspondante à \hat{u} alors, il existe un état adjoint $\hat{\rho}$ tel que le triplette $(\hat{q}, \hat{\rho}, \hat{u})$ est solution du système d'optimalité suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial t} \hat{q} - \Delta \hat{q} = (h + \hat{u}) \chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ \hat{q}(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \hat{q} = 0 & \text{sur } \Sigma. \\ \hat{q}(0) = 0, & \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} - \Delta \hat{\rho} = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ \hat{\rho} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \hat{u} = \hat{\rho} \chi_{\mathcal{O}} & \end{array} \right. \quad (21)$$

Références



I. REZZOUG. *Étude théorique et numérique des problèmes d'identification des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Thèse de doctorat, Université de Oum El Bouaghi, Algérie, (2014).*



I. REZZOUG. *Identification d'une partie de la frontière inconnue d'une membrane, Thèse de magister, Université de Oum El Bouaghi, Algérie, (2009).*







O. NAKOULIMA, *A revision of J. L. L lions notion of sentinels, Portugal. Math. (N.S). Vol. 65, Fasc. 1, pp. 1-22, 2008.*



BERHAIL AMEL, *Étude des systèmes hyperboliques à données manquantes, Thèse de doctorat, Université de mentouri, Constantine, 2013.*

Références

Références

-  S. MIZOHATA, *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques*, *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A, Vol 31*, pp 219-239, 1958.
-  Y. MILOUDI, O. NAKOULIMA, A. OMRANE, *A method for detecting pollution in dissipative systems with incomplete data*, *ESAIM, Proceeding, Vol. 17*, pp. 67-79, 2007.
-  T. CHAHNAZ ZAKIA, *Détection de la pollution et identification des défauts en élasticité linéaire*, *Thèse de doctorat, Université d'Oran*, 2013.
-  J. L. LIONS, *contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, *Dunod, Gauthier-Villars, Paris*, 1968.

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction

Sentinelles de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Références

1

DR.
REZZOUG
IMAD

Introduction





Sentinelle de
J.L.Lions

Contrôlabilité
à zéro avec
contraintes sur
le contrôle

Références

Remerciements

Références

-  J. L. LIONS, *Distributed systems with incomplete data and problems environment. Some remarks, Collège de France, pp. 58-101, 1988.*
-  J. S. SAUT, B. SCHEURER, *Unique continuation for some evolution equations, J. Deff. Equ., Vol 66, pp. 118-139, 1987.*
-  J. LIONS, E. MAGENES, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Massons, Paris 1983.*
-  J. C. SAUT ET B. SCHEURER, *Remarques sur un théorème de prolongement unique de MIZOHATA. C.R.A.S. Paris, p. 307-310, 1983.*

Merci De Votre Attention