On critical elliptic Kirchhff type problems in unbounded domain

Atika MATALLAH

Ecole supérieure de management de Tlemcen

Tuniso-Libanese workshop in Control Theory and Related Fields

October 30-31, 2019

Plan de travail

Plan de travail

Plan de travail

Plan de travail

Plan de travail

On établit l'existence et la multiplicité des solutions pour le problème de Kirchhoff avec exposant critique de Sobolev:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -\left(a\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx+b\right)\Delta u=u^5+\lambda f(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ u\in H^1\left(\mathbb{R}^3\right), \end{cases}$$

a et b sont deux constantes positives, λ est un paramètre positive et f appartient à $H^{-1}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

il y a des travaux ayant considéré le problème suivant:

$$(\mathcal{P}_{a,V,h}) \left\{ \ -\left(a\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx+b\right)\Delta u+V\left(x\right)u=h(x,u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \right.$$

où $N\geq 3$, $a>0$, b est une constante positive, $V\in C\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ et $h\in C\left(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}\right)$ étant à croissance sous critique et satisfaisant des conditions suffisantes pour s'assurer que toute suite de Palais Smale est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

- (X. Wu, 2011) a eu recours à l'hypothèse suivante:

$$(*) \quad \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \geq c > 0 \text{ et pour tout } d > 0;$$

$$mes\left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq d\right\} < \infty,$$

il a montré l'existence des solutions non triviales pour $(\mathcal{P}_{a,V,h})$.

- (X. Wu, 2011) a eu recours à l'hypothèse suivante:

$$(*) \quad \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \geq c > 0 \text{ et pour tout } d > 0;$$

$$mes\left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq d\right\} < \infty,$$

il a montré l'existence des solutions non triviales pour $(\mathcal{P}_{a,V,h})$.
- (S. J. Chena, L. Li, 2013) ont étudié $(\mathcal{P}_{a,V,h})$ où $h(x,u) = k(x,u) + f(x)$, k satisfait la condition du type Ambrosetti–Rabinowitz, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et V vérifie l'hypothèse $(*)$. Ils ont montré l'existence de multiples solutions en utilisant le principe variationnel d'Ekeland ainsi que le Lemme du Col.

- (X. Wu, 2011) a eu recours à l'hypothèse suivante:

$$\begin{aligned}(*)\quad \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) &\geq c > 0 \text{ et pour tout } d > 0; \\ mes\left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq d\right\} &< \infty,\end{aligned}$$

  il a montré l'existence des solutions non triviales pour $(\mathcal{P}_{a,V,h})$.
- (S. J. Chena, L. Li, 2013) ont étudié $(\mathcal{P}_{a,V,h})$ où $h(x,u) = k(x,u) + f(x)$, k satisfait la condition du type Ambrosetti–Rabinowitz, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et V vérifie l'hypothèse $(*)$. Ils ont montré l'existence de multiples solutions en utilisant le principe variationnel d'Ekeland ainsi que le Lemme du Col.
- (F. Li, Y. Li et J. Shi, 2014) ont aussi étudié $(\mathcal{P}_{a,V,h})$ avec $V \equiv 0$, ils ont prouvé l'existence d'une constante $a_0 > 0$ telle que $(\mathcal{P}_{a,0,h})$ possède une solution positive pour tout $a \in (0, a_0)$.

Notre objectif est d'étendre les résultats (L-L-S) au cas critique. Puisque l'injection $\left(H^1(\mathbb{R}^3),\ \|.\|\right) \hookrightarrow \left(L^6\left(\mathbb{R}^3\right),\ \|.\|_6\right)$ n'est jamais compacte même sous l'hypothèse $(*)$,on supposera que $V \equiv 0$ et on montrera l'existence de deux solutions pour toute constante positive a.

Notre résultat principal est le suivant:

Theorem

Soit $a > 0$, $b > 0$ *et* $f \not\equiv 0$. *Alors, il existe* $\lambda_* > 0$ *tel que* $(\mathcal{P}_\lambda)$ *admet au moins deux solutions non triviales pour tout* $\lambda \in (0, \lambda_*)$ ..

La meilleure constante de Sobolev
$S = \inf \left\{ \|u\|^2 \|u\|_6^{-2};\ u \in H^1\left(\mathbb{R}^3\right) \right\}$, est atteinte dans $\mathbb{R}^3$ par les fonctions

$$u_\varepsilon = (3\varepsilon)^{1/4} \left(\varepsilon + |x|^2\right)^{-1/2},$$

où $\varepsilon > 0$.
On définit la fonctionnelle d'énergie I_λ associée à $(\mathcal{P}_\lambda)$ par:

$$I_\lambda(u) = \frac{a}{4}||u||^4 + \frac{b}{2}||u||^2 - \frac{1}{6}\|u\|_6^6 - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} fu\ dx,$$

I_λ est bien définie dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ et est de classe $C^1\left(H^1\left(\mathbb{R}^3\right), \mathbb{R}\right)$.
On dit qu'un point $u \in H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ est solution faible du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ s'il vérifie:

$$\left(a||u||^2 + b\right) \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \varphi\ dx - \int_{\mathbb{R}^3} u^5 \varphi\ dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} f \varphi\ dx = 0, \quad \text{pour tout } \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Lemma (1)

Il existe des constantes positives λ_1, ρ_1 *et* δ_1 *telles que pour tout* $\lambda \in (0, \lambda_1)$ *on ait*

$$I_\lambda(u)|_{\partial B_{\rho_1}} \geq \delta_1 \text{ et } I_\lambda(u)|_{B_{\rho_1}} \geq -\frac{\lambda^{3/2}}{2}\|f\|_-^2$$

Lemma (2)

Soit $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ *une suite de* $(PS)_c$ *de* I_λ *pour un certain* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $H^1(\mathbb{R}^3)$. *Alors*

$$\text{soit } u_n \to u \text{ fortement, ou } c \geq I_\lambda(u) + C_{a,b,S},$$

où

$$C_{a,b,S} = \frac{ab}{4}S^3 + \frac{a^3}{24}S^6 + \left(\frac{a^2}{24}S^3 + \frac{b}{6}\right)\left(a^2S^6 + 4bS^3\right)^{1/2}.$$

On définit $c_1 = \inf\left\{I_\lambda\left(u\right);\ u \in \bar{B}_{\rho_1}\right\}$.Puisque $f \not\equiv 0$, on peut choisir $\Phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3 \backslash \left\{0\right\}\right)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^3} f\Phi\, dx > 0$. Il existe $t_0 > 0$ suffisament petit tel que $\|t_0\Phi\| < \rho_1$ et

$$I_\lambda(t_0\Phi) = \frac{a}{4} t_0^4 \left\|\Phi\right\|^4 + \frac{b}{2} t_0^2 \left\|\Phi\right\|^2 - \frac{t_0^6}{6}\left\|\Phi\right\|_6^6 - \lambda t_0 \int_{\mathbb{R}^3} f\Phi\, dx < 0$$

d'où $c_1 < 0 = I_\lambda(0)$. Le principe variationnel d'Ekeland appliqué à l'espace métrique $\bar{B}_{\rho_1}$ complet pour la norme de $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, nous assure l'existense d'une suite de $\left(\mathrm{PS}\right)_{c_1}$ $\left(u_n\right) \subset \bar{B}_{\rho_1}$ telle que $u_n \rightharpoonup u_1$ faiblement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ pour certain u_1 avec $\|u_1\| \leq \rho_1$. Supposons que $u_n \nrightarrow u_1$ fortement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, il s'en suivra du lemme précédent que

$$c_1 \geq I_\lambda\left(u_1\right) + C_{a,b,S} > c_1,$$

d'où la contradiction. On conclut que u_1 est une solution non triviale du problème $\left(\mathcal{P}_\lambda\right)$ avec énergie négative.

L'existence de cette solution suivra immédiatement du lemme suivant.

Lemma (3)

Soit $\lambda_2 > 0$ *tel que*

$$-\frac{\lambda^{3/2}}{2}\|f\|_{-}^{2} + C_{a,b,S} > 0, \text{ pour tout } \lambda \in (0, \lambda_2).$$

Il existe alors $z_\varepsilon \in H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ *et* $0 < \lambda_* \leq \lambda_2$ *tels que*

$$\sup_{t\geq 0} I_\lambda(tz_\varepsilon) < c_1 + C_{a,b,S}, \quad \text{pour tout } \lambda \in (0, \lambda_*)$$

Notons que $I_\lambda(0) = 0$ et $I_\lambda(Tz_\varepsilon) < 0$ pour T suffisament grand, et de ce qui précéde, on sait que

$$I_\lambda\left(u\right)\big|_{\partial B_{\rho_1}} \geq \delta_1 > 0 \text{ pour tout } \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Alors du Théorème de Mountain Pass, on a l'existence d'une suite de $(\mathrm{PS})_{c_2}$ où

$$c_2 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda\left(\gamma\left(t\right)\right),$$

avec $\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,\ 1],\ H^1\left(\mathbb{R}^3\right)),\ \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = Tz_\varepsilon\right\}$. On conclut que (u_n) possède une sous suite encore notée (u_n), telle que $u_n \rightharpoonup u_2$ faiblement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. De plus, on sait en vertu du lemme précédent que

$$\sup_{t \geq 0} I_\lambda(tz_\varepsilon) < C_{a,b,S} + c_1,\ \text{pour tout } \lambda \in (0, \lambda_*),$$

par conséquent, on conclut que $u_n \to u_2$ fortement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. On obtient donc un point critique u_2 de I_λ satisfaisant $I_\lambda\left(u_2\right) > 0$.

- A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.
- C.O. Alves, F J.S.A. Correa, T.F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Comput. Math. Appl. 49 (2005) 85-93.
- S. Benmansour, M. Bouchekif, Nonhomogeneous elliptic Kirchhoff type problems involving critical Sobolev exponent, Electon. J. Diff. Equ. vol. 2015 (2015), No. 69, pp. 1-11.

H. Brezis, L. Nirenberg, Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

S. J. Chena, L. Li, Multiple solutions for the nonhomogeneous Kirchhoff equation on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis: Real World Applications 14 (2013) 1477-1486.

P. Drábek, S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (1997) 703-726.

I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 324-353.

G. Kirchhoff, Mechanik. Teubner. Leipzig (1883).

H.L. Lin, Positive solutions for nonhomogeneous ellptic equations involving critical Sobolev exponent, Nonlinear Anal. 75 (2012) 2660-2671.

J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations in: North-Holland Math. Stud. vol. 30. North-Holland. Amsterdam.(1978) 284-346.

F. Li, Y. Li, J. Shi, Existence of positive solutions to Kirchhoff type problems with zero mass, J. Math. Anal. Appl. 410 (2014) 361-374.

- G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976) 353-372.
- G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Nonlinéaire 9 (1992) 281-304.
- X. Wu, Exitence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2011) 1278-1287.

Merci pour votre attention