Stabilization of Kirchhoff's Equations

CHERIAA MARWA

Ecole Supérieure des sciences et de la Technologie de Hammam Sousse

Université de Sousse

Plan

- Introduction
- Existence locale
- Existence globale et décroissance de l'énergie

Position du problème

On cherche à déterminer un "vecteur de fonction" $u = (u_1, \ldots, u_N)$ définie sur $\prod_{j=1}^{N}]0, l_j[\times]0, +\infty[$ à valeurs réelles vérifiant les équations des ondes non linéaire dites de Kirchhoff sur un réseau

Position du problème

On cherche à déterminer un "vecteur de fonction" $u = (u_1, \dots, u_N)$ définie sur $\prod_{j=1}^{N}]0, l_j[\times]0, +\infty[$ à valeurs réelles vérifiant les équations des ondes non linéaire dites de Kirchhoff sur un réseau
$\forall j = 1, \dots, N$:

$$\partial_t^2 u_j - \left(a_j + b_j \int_0^{l_j} |\partial_x u_j|^2 dx \right) \partial_x^2 u_j = \mu_j |u_j|^{q-1} u_j, \quad \text{sur }]0, l_j[\times]0, +\infty[, \tag{1}$$

Position du problème

On cherche à déterminer un "vecteur de fonction" $u = (u_1, \ldots, u_N)$ définie sur $\prod_{j=1}^{N}]0, l_j[\times]0, +\infty[$ à valeurs réelles vérifiant les équations des ondes non linéaire dites de Kirchhoff sur un réseau $\forall j = 1, \ldots, N$:

$$\partial_t^2 u_j - \left(a_j + b_j \int_0^{l_j} |\partial_x u_j|^2 dx \right) \partial_x^2 u_j = \mu_j |u_j|^{q-1} u_j, \quad \text{sur }]0, l_j[\times]0, +\infty[, \tag{1}$$

avec a_j et b_j sont des constantes strictement positives, $q > 1$, $\mu_j \geq 0$.

Position du problème

$$\begin{cases} u_j(l_j,t)=0, & \forall\ t\geq 0\ ,\ \forall\ 1\leq j\leq N \\ u_j(0,t)=u_1(0,t), & \forall\ t\geq 0\ ,\ \forall\ 2\leq j\leq N \end{cases} \tag{2}$$

Position du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_j(l_j,t)=0, & \forall\ t\geq 0\ ,\ \forall\ 1\leq j\leq N \\ u_j(0,t)=u_1(0,t), & \forall\ t\geq 0\ ,\ \forall\ 2\leq j\leq N \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(a_j+b_j\int_0^{l_j}|\partial_x u_j|^2dx\right)\partial_x u_j(0,t)=g\left(\partial_t u_1(0,t)\right),\ \forall\ t\geq 0 \tag{3}$$

Position du problème

$$\begin{cases} u_j(l_j,t) = 0, & \forall\ t \geq 0\ ,\ \forall\ 1 \leq j \leq N \\ u_j(0,t) = u_1(0,t), & \forall\ t \geq 0\ ,\ \forall\ 2 \leq j \leq N \end{cases} \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left(a_j + b_j \int_0^{l_j} |\partial_x u_j|^2 dx\right) \partial_x u_j(0,t) = g\left(\partial_t u_1(0,t)\right),\ \forall\ t \geq 0 \quad (3)$$

où g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \exists\ m \text{ et } M \in \mathbb{R};\ 0 < m \leq g'(s) \leq M,\ \forall s \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (4)$$

Position du problème

$$\begin{cases} u_j(l_j,t)=0, & \forall\ t\geq 0\ ,\ \forall\ 1\leq j\leq N \\ u_j(0,t)=u_1(0,t), & \forall\ t\geq 0\ ,\ \forall\ 2\leq j\leq N \end{cases} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(a_j+b_j\int_0^{l_j}|\partial_x u_j|^2dx\right)\partial_x u_j(0,t)=g\left(\partial_t u_1(0,t)\right),\ \forall\ t\geq 0 \tag{3}$$

où g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ \exists\ m \text{ et } M\in\mathbb{R};\ 0<m\leq g'(s)\leq M,\ \forall s\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

et satisfaisant aux conditions de Cauchy (données initiales)

$$\begin{cases} u(0)=u^0=\left(u_1^0,\ldots,u_N^0\right), & \forall\ 1\leq j\leq N \\ \partial_t u(0)=u^1=\left(u_1^1,\ldots,u_N^1\right), & \forall\ 1\leq j\leq N \end{cases} \tag{5}$$

Notations et préliminaires

On note $\forall\ 1 \leq j \leq N$

$$\beta_{u_j}(t) = a_j + b_j |\partial_x u_j(t)|^2,$$

Notations et préliminaires

On note $\forall\ 1 \leq j \leq N$

$$\beta_{u_j}(t) = a_j + b_j |\partial_x u_j(t)|^2,$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^{l_j} u(x)v(x)dx, \text{ le produit scalaire sur } L^2(0, l_j),$$

Notations et préliminaires

On note $\forall\ 1 \leq j \leq N$

$$\beta_{u_j}(t) = a_j + b_j |\partial_x u_j(t)|^2,$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^{l_j} u(x)v(x)dx, \text{ le produit scalaire sur } L^2(0, l_j),$$

$$|u|_{L^p} := \left(\int_0^{l_j} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ la norme sur } L^p(0, l_j), \text{ pour } p \geq 1.$$

On note en particulier $|.|_{L^2(0,l_j)}$ par $|.|_0$.

Notations et préliminaires

$$\mathcal{X} = \prod_{j=1}^{N} L^2(0, l_j)$$

Notations et préliminaires

$$\mathcal{X} = \prod_{j=1}^{N} L^2(0, l_j)$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \prod_{j=1}^{N} H^1(0, \ell_j);\ \left\{ \begin{array}{ll} u_j(0) = u_1(0) & \forall\ 2 \leq j \leq N \\ u(\ell_j) = 0 & \forall\ 1 \leq j \leq N \end{array} \right. \right\}$$

Notations et préliminaires

$$\mathcal{X} = \prod_{j=1}^{N} L^2(0, l_j)$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \prod_{j=1}^{N} H^1(0, \ell_j); \ \left\{ \begin{array}{ll} u_j(0) = u_1(0) & \forall\ 2 \leq j \leq N \\ u(\ell_j) = 0 & \forall\ 1 \leq j \leq N \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ (u, v) \in \left(\prod_{j=1}^{N} H^2(0, \ell_j) \cap V \right) \times V; \ \sum_{j=1}^{N} \beta_{u_j} \partial_x u_j(0) = g\left(v_1(0)\right) \right\}.$$

Notations et préliminaires

On pose

$$\beta_u(t) = \begin{pmatrix} \beta_{u_1}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{u_2}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{u_N}(t) \end{pmatrix}, \ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_N \end{pmatrix}$$

.

Notations et préliminaires

On pose

$$\beta_u(t) = \begin{pmatrix} \beta_{u_1}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{u_2}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{u_N}(t) \end{pmatrix}, \ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_N \end{pmatrix}$$

. et

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix},$$

$$|u|^{q-1}u = \begin{pmatrix} |u_1|^{q-1}u_1 \\ \vdots \\ |u_N|^{q-1}u_N \end{pmatrix}, \quad \nabla u = \begin{pmatrix} \partial_x u_1 \\ \vdots \\ \partial_x u_N \end{pmatrix}, \quad \Delta u = \begin{pmatrix} \partial_x^2 u_1 \\ \vdots \\ \partial_x^2 u_N \end{pmatrix}.$$

Notations et préliminaires

Alors les N équations différentielles de (1) seront équivalentes à l'équation suivante:

$$\partial_t^2 u - \beta_u(t)\Delta u = \mu|u|^{q-1}u \tag{6}$$

Existence locale

Existence locale

Theorem

On suppose que les données initiales

$$(u^0, u^1) \in \mathcal{H} \tag{7}$$

alors il existe un temps $T > 0$ et une unique fonction u telle que:

$$\begin{cases} (u, \dot{u}) \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \\ \ddot{u} \in L^\infty(0, T; \mathcal{X}) \end{cases} \tag{8}$$

solution du problème (6).

Existence locale

Proof.

La démonstration est basée sur la méthode de Faedo Galerkin, qui consiste à résoudre le système dans des espaces à dimensions finies, puis utiliser les méthodes de compacité, par les étapes suivantes.

- Solutions approchées
- Estimations a priori
- Passage à la limite et vérifications
- Unicité.

□

Solutions approchées

On introduit une suite $(W_1, \ldots, W_n, \ldots)$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} W_i \in V \cap \mathcal{H} \quad ; \ \langle W_i, W_j \rangle = \delta_{ij} \\ \text{les combinaisons linéaires finies des } W_i \\ \text{sont denses dans } V \cap \mathcal{H}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Solutions approchées

On introduit une suite $(W_1, \ldots, W_n, \ldots)$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_i \in V \cap \mathcal{H} \;\; ; \; \langle W_i, W_j \rangle = \delta_{ij} \\ \text{les combinaisons linéaires finies des } W_i \\ \text{sont denses dans } V \cap \mathcal{H}. \end{array} \right. \tag{9}$$

On désigne par

$$V_n = vect\{W_1, \ldots, W_n\},$$

le sous espace vectoriel de V engendré par $(W_i)_{i=1}^n$.

Solutions approchées

On ait amené donc à trouver $T > 0$ et une fonction u_n définie sur $[0, T]$ à valeurs dans V_n vérifiant

$$\begin{cases} \langle \partial_t^2 u_n, W_k \rangle + g\left(\partial_t u_n(0,t)\right) W_{k1}(0) + \langle \beta_{u_n} \nabla u_n, \nabla W_k \rangle = \langle \mu |u_n|^{q-1} u_n, W_k \rangle , \\ \hfill \forall 1 \leq k \leq n \\ u_n(0) = u_n^0 = (u_{n1}^0, \dots, u_{nN}^0) \\ \partial_t u_n(0) = u_n^1 = (u_{n1}^1, \dots, u_{nN}^1) \end{cases} \tag{10}$$

Solutions approchées

On ait amené donc à trouver $T > 0$ et une fonction u_n définie sur $[0, T]$ à valeurs dans V_n vérifiant

$$\begin{cases} \left\langle \partial_t^2 u_n, W_k \right\rangle + g\left(\partial_t u_n(0,t)\right) W_{k1}(0) + \langle \beta_{u_n} \nabla u_n, \nabla W_k \rangle = \left\langle \mu |u_n|^{q-1} u_n, W_k \right\rangle, \\ \hfill \forall 1 \leq k \leq n \\ u_n(0) = u_n^0 = (u_{n1}^0, \dots, u_{nN}^0) \\ \partial_t u_n(0) = u_n^1 = (u_{n1}^1, \dots, u_{nN}^1) \end{cases} \tag{10}$$

où

$$u_n^0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k W_k = \sum_{k=1}^{n} \left\langle u^0, W_k \right\rangle W_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} u^0, \text{ dans } V \cap \mathcal{H} \tag{11}$$

et

$$u_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k W_k = \sum_{k=1}^{n} \left\langle u^1, W_k \right\rangle W_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} u^1, \text{ dans } V. \tag{12}$$

Solutions approchées

$u_n(t)$ s'écrit sous la forme

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} C_{n,i}(t) W_i(x), \tag{13}$$

Solutions approchées

$u_n(t)$ s'écrit sous la forme

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} C_{n,i}(t) W_i(x), \tag{13}$$

les fonctions scalaires $C_{n,i}$, $1 \leq i \leq n$, vérifient le système différentiel du second ordre,

$$\begin{cases} \forall k \in 1, \dots, n \\ \ddot{C}_{n,k}(t) + \sum_{i=1}^{n} C_{ni}(t) \left\langle a_N + b_N \left(\sum_{i=1}^{n} C_{n,i}(t) |\nabla W_i|_x^2 \right) \nabla W_i, \nabla W_k \right\rangle + \\ \qquad g\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{C}_{n,i}(t) W_{i1}(0) \right) W_{k1}(0) = \left\langle \mu \left| \sum_{i=1}^{n} C_{n,i}(t) W_{ij} \right|^{q-1} \sum_{i=1}^{n} C_{n,i}(t) W_{ij}, W_k \right\rangle \\ C_{n,k}(0) = \alpha_k \quad \text{et} \quad \dot{C}_{n,k}(0) = \gamma_k. \end{cases} \tag{14}$$

Existence locale

$$Q_n(t) = \begin{pmatrix} G_n(t) \\ \dot{G}_n(t) \end{pmatrix}$$

Existence locale

$$Q_n(t) = \begin{pmatrix} G_n(t) \\ \dot{G}_n(t) \end{pmatrix}$$

Où

$$G_n(t) = (C_{n,1}(t), \ldots, C_{n,n}(t))^t$$

le système (14) sera équivalent à une équation différentielle ordinaire (autonome)

Existence locale

$$Q_n(t) = \begin{pmatrix} G_n(t) \\ \dot{G}_n(t) \end{pmatrix}$$

Où

$$G_n(t) = (C_{n,1}(t), \dots, C_{n,n}(t))^t$$

le système (14) sera équivalent à une équation différentielle ordinaire (autonome)

$$\begin{cases} \dot{Q}_n(t) = K_n(Q_n(t)) \\ Q_n(0) = (G_n(0), \dot{G}_n(0))^t, \end{cases} \tag{15}$$

Solutions approchées

Graçe au fait que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et D'après le théorème de Nemitski, on arrive à montrer que l'application K_n est continue sur $\mathbb{R}^n$ et par suite d'après le théorème de Cauchy-Peano-Arzela l'équation différentielle (15) admet une solution locale de classe $\mathcal{C}^2$. On désigne par $[0, T_n[$ l'intervalle maximal d'existence.

Estimations a priori

$$f_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \left|\partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2 + a_j\left|\partial_x u_{nj}(t)\right|_0^2$$

Estimations a priori

$$f_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \left|\partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2 + a_j\left|\partial_x u_{nj}(t)\right|_0^2$$

$$M = \left|u^1\right|_{\mathcal{X}}^2 + a_{max}\left|u^0\right|_V + \frac{1}{2} b_{max}\left|u^1\right|_V^4$$

Estimations a priori

$$f_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \left|\partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2 + a_j \left|\partial_x u_{nj}(t)\right|_0^2$$

$$M = \left|u^1\right|_{\mathcal{X}}^2 + a_{max}\left|u^0\right|_V + \frac{1}{2} b_{max}\left|u^1\right|_V^4$$

$$f_n(t) \leq M + \mu_{max} C^q \int_0^t \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{a_j^q} \left(a_j^q \left|\partial_x u_{nj}(t)\right|_0^{2q} \right) + \left|\partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2 \right] ds$$
$$\leq M + \int_0^t \left(a(s) f_n(s) + b(s) f_n^q(s) \right) ds$$

Estimations a priori

$$f_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \left|\partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2 + a_j \left|\partial_x u_{nj}(t)\right|_0^2$$

$$M = \left|u^1\right|_{\mathcal{X}}^2 + a_{max}\left|u^0\right|_V + \frac{1}{2} b_{max}\left|u^1\right|_V^4$$

$$\begin{aligned} f_n(t) &\leq M + \mu_{max} C^q \int_0^t \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{a_j^q} \left(a_j^q \left|\partial_x u_{nj}(t)\right|_0^{2q} \right) + \left|\partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2 \right] ds \\ &\leq M + \int_0^t \left(a(s) f_n(s) + b(s) f_n^q(s)\right) ds \end{aligned}$$

avec $a(s) := \mu_{max} C_{max}^q$ et $b(s) := \dfrac{\mu_{max} C_{max}^q}{a_{min}^q}$.

Estimations a priori

Lemma

Soient f, a et b trois fonctions continues positives sur un intervalle $[0, T]$, $M \in \mathbb{R}$ et $q > 1$ vérifiant l'inégalité

$$f(t) \leq M + \int_0^t \Big(a(s) f(s) + b(s) f(s)^q \Big) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{16}$$

Si on désigne par $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)\, ds$ et si on suppose que

$$G(t) := (q-1) M^{q-1} \int_0^t b(s)\, e^{A(s)}\, ds < 1, \quad \forall t \in [0, T] \tag{17}$$

alors

$$f(t) \leq \frac{M\, e^{A(t)}}{\big(1 - G(t)\big)^{\frac{1}{q-1}}}. \tag{18}$$

Estimations a priori

On arrive alors à trouver une constante

$$\widetilde{C} = \frac{M}{2^{\frac{1}{q-1}}} e^{\mu_{max} C^q \ T_0}$$

avec

$$T_0 := \log\left(1 + \frac{a_{min}^q M^{1-q}}{q-1}\right) \frac{1}{\mu_{max} C^q}.$$

Estimations a priori

On arrive alors à trouver une constante

$$\widetilde{C} = \frac{M}{2^{\frac{1}{q-1}}} e^{\mu_{max} C^q \ T_0}$$

avec

$$T_0 := \log\left(1 + \frac{a_{min}^q M^{1-q}}{q-1}\right) \frac{1}{\mu_{max} C^q}.$$

telle que

$$\forall t \in [0, T[; \ f_n(t) \leq \widetilde{C} \tag{19}$$

D'après la maximalité de la solution u_n on a

$$T_n \geq T, \quad \forall n.$$

Estimations a priori

De l'inégalité (6), on obtient :

$$|\partial_t u_n(t)|^2_{L^\infty\left(0,T;\mathcal{X}\right)} + a_{min}|u_n(t)|^2_{L^\infty\left(0,T;V\right)} \leq \widetilde{C}. \qquad (20)$$

Estimations a priori

De l'inégalité (6), on obtient :

$$|\partial_t u_n(t)|^2_{L^\infty\left(0,T;\mathcal{X}\right)} + a_{min}|u_n(t)|^2_{L^\infty\left(0,T;V\right)} \leq \widetilde{C}. \tag{20}$$

On en déduit que, la suite $(u_n)_n$ admet une sous suite (encore notée $(u_n)_n$) telle que

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{*} u \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \\ \partial_t u_n \xrightarrow{*} \partial_t u \text{ dans } L^\infty(0,T;\mathcal{X}). \end{cases} \tag{21}$$

Estimations a priori

Proposition

On définit

$$H_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \left|\partial_t^2 u_{nj}(t)\right|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \beta_{u_{nj}}(t) \left|\partial_x \partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2,$$

alors la suite $\left(H_n\right)_n$ *est uniformément bornée sur* $[0, T]$.

Estimations a priori

$$|\partial_t u|^2_{L^\infty\left(0,T;\mathcal{X}\right)} + a_{min}|u|^2_{L^\infty\left(0,T;V\right)} \leq \underline{\lim}\left(|\partial_t^2 u_n|^2_{L^\infty\left(0,T;\mathcal{X}\right)} + |\partial_t u_n|^2_{L^\infty\left(0,T;V\right)}\right) \leq \bar{C}. \tag{22}$$

[1] encore notée $(u_n)_n$

Estimations a priori

$$|\partial_t u|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{X})} + a_{min}|u|^2_{L^\infty(0,T;V)} \leq \underline{\lim}\left(|\partial_t^2 u_n|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{X})} + |\partial_t u_n|^2_{L^\infty(0,T;V)}\right) \leq \bar{C}. \tag{22}$$

L'inégalité (22) montre que

$$\begin{cases} (\partial_t u_n)_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; V) \\ (\partial_t^2 u_n)_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; \mathcal{X}), \end{cases}$$

[1] encore notée $(u_n)_n$

Estimations a priori

$$|\partial_t u|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{X})} + a_{min}|u|^2_{L^\infty(0,T;V)} \leq \underline{\lim}\left(|\partial_t^2 u_n|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{X})} + |\partial_t u_n|^2_{L^\infty(0,T;V)}\right) \leq \bar{C}. \tag{22}$$

L'inégalité (22) montre que

$$\begin{cases} (\partial_t u_n)_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; V) \\ (\partial_t^2 u_n)_n \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; \mathcal{X}), \end{cases}$$

et donc la suite $(u_n)_n$ admet une sous suite ([1]), vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t u_n \xrightarrow{\ *\ } \partial_t u \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \\ \partial_t^2 u_n \xrightarrow{\ *\ } \partial_t^2 u \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathcal{X}). \end{cases} \tag{23}$$

[1] encore notée $(u_n)_n$

Unicité

Proposition

La fonction u solution du problème (6) est unique.

Unicité

Proposition

La fonction u solution du problème (6) est unique.

Proof.

Soient u et v deux solutions du problème (6), on pose $w = u - v$

$$R(t) = \sum_{j=1}^{N} |\partial_t w_j|_0^2 + \beta_{u_j}(t)|\partial_x w_j|_0^2.$$

$$R(t) \leq C \int_0^t R(s)ds$$

d'aprés le lemme de Gronwall, $w = 0$. $\square$

Existence globale et décroissance de l'énergie

Introduction

$$E(t) \equiv E(u(t)) = \frac{1}{2}|\partial_t u(t)|_x^2 + J(u(t)),$$

Introduction

$$E(t) \equiv E(u(t)) = \frac{1}{2}\left|\partial_t u(t)\right|_x^2 + J(u(t)),$$

$$J(u(t)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{2}\left|\partial_x u_j(t)\right|_0^2 + \frac{b_j}{4}\left|\partial_x u_j(t)\right|_0^4 - \frac{\mu_j}{q+1}\left|u_j(t)\right|_{q+1}^{q+1}$$

l'énergie potentielle de la solution.

Introduction

$$E(t) \equiv E(u(t)) = \frac{1}{2}\left|\partial_t u(t)\right|_x^2 + J(u(t)),$$

$$J(u(t)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{2}\left|\partial_x u_j(t)\right|_0^2 + \frac{b_j}{4}\left|\partial_x u_j(t)\right|_0^4 - \frac{\mu_j}{q+1}\left|u_j(t)\right|_{q+1}^{q+1}$$

l'énergie potentielle de la solution. On pose

$$I(u) = \sum_{j=1}^{N} a_j\left|\partial_x u_j\right|_0^2 - \mu_j\left|u_j\right|_{q+1}^{q+1}$$

et

$$W = \{u \in V \ ; \ I(u) > 0\} \cup \{0\}.$$

Existence globale

Soit T_{max} le temps maximal d'existence de la solution du problème (6)

Existence globale

Soit T_{max} le temps maximal d'existence de la solution du problème (6)

$$\frac{d}{dt}E(t) + g(u_t(0,t))u_t(0,t) = 0, \ \forall t \in [0, T_{max}[. \qquad (24)$$

Existence globale

Soit T_{max} le temps maximal d'existence de la solution du problème (6)

$$\frac{d}{dt}E(t) + g(u_t(0,t))u_t(0,t) = 0, \ \forall t \in [0, T_{max}[. \tag{24}$$

$$E(t) \leq E(0), \ \forall t \in [0, T_{max}[, \tag{25}$$

Existence globale

Lemma

Soit

$$(u^0, u^1) \in W \cap \mathcal{H}, \quad et \quad u \in C^1([0, T_{max}[; V)$$

la solution de (6). Si

$$\alpha := \frac{\mu_{max} C_p^{q+1}}{a_{min}} \left[\frac{2(q+1)}{(q-1)a_{min}} E(0) \right]^{\frac{q-1}{2}} < 1 \tag{26}$$

alors

$$u(t) \in W \ \forall t \in [0, T_{max}[.$$

C_p est la constante de l'inégalité du Sobolev-Poincarré.

Existence globale

Theorem

Soient $(u^0, u^1) \in W \cap \mathcal{H}$ *et vérifiant l'hypothèse (26).*
On suppose de plus qu'il existe $0 < \varepsilon_0 < 1$ *et* $K > 4$ *tels que*

$$max\Big\{ \left[\frac{2Nb_{max}}{a_{min}^2}\left(\frac{2(q+1)}{(q-1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4Nb_{max}}{a_{min}^2}\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] E(0)^{\frac{1}{2}},$$
$$\frac{4b_{max}^2 N^2(q+1)}{ma_{min}^4(q-1)} E(0), \frac{4b_{max}^2 N^2 \mu_{max}^2 C_p^{2q}}{2ma_{min}^3}\left[\frac{2(q+1)}{a_{min}(q-1)} E(0)\right]^{q+1} +$$
$$\frac{4b_{max}^2 N^2 \mu_{max}^2 C_p^{2q}}{2ma_{min}^3}\left[\frac{2(q+1)}{a_{min}(q-1)} E(0)\right]^{q+1} +$$
$$\frac{\mu_{max} NqC_p^q}{a_{min}^{\frac{q}{2}}}\left[\frac{2(q+1)}{(q-1)} E(0)\right]^{\frac{q-1}{2}} +$$
$$\frac{2Nb_{max}\mu_{max} C_p^q}{a_{min}^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{2(q+1)}{a_{min}(q-1)} E(0)\right]^{\frac{q+1}{2}} \Big\}$$
$$\leq \frac{1}{K} \qquad (27)$$

Existence globale

et

$$F(|\partial_x u^0|_{\mathcal{X}}, |\partial_x^2 u^0|_{\mathcal{X}}, |\partial_x u^1|_{\mathcal{X}}) < \frac{\varepsilon_0}{K} \tag{28}$$

où C_p *est la constante de l'injection de* V *dans* $\prod_{j=1}^{N} L^{2q}(0, l_j)$ *et*

$$F(X, Y, Z) = \mu_{max}^2 C_p^{2q} X + m_1^2 Y + \frac{m_1}{2} Z \tag{29}$$

avec $m_1 = a_{max} + \dfrac{b_{max}}{a_{min}} \dfrac{2(q+1)}{(q-1)} E(0).$

Existence globale

Alors la solution du problème (6) *est globale et vérifie :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, \dot{u}) \in L^\infty([0, +\infty[\, ; V \cap \mathcal{H}) \\ \ddot{u} \in L^\infty([0, +\infty[\, ; \mathcal{X}). \end{array} \right. \tag{30}$$

De plus, il existe $C_0 > 0$ *et* $\gamma > 0$ *telle que l'énergie du système vérifie :*

$$E(t) \leq C_0\, e^{-\gamma t}, \qquad \forall t \geq 0 \tag{31}$$

où C_0 *et* λ *deux constantes positives.*

Existence globale

$$H_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \left| \partial_t^2 u_{nj}(t) \right|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \beta_{u_{nj}}(t) \left| \partial_x \partial_t u_{nj}(t) \right|_0^2 ,$$

Existence globale

$$H_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\left|\partial_t^2 u_{nj}(t)\right|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\beta_{u_{nj}}(t)\left|\partial_x\partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2,$$

$$\frac{1}{2}\left|\partial_t^2 u(t)\right|_{\mathcal{X}}^2 + \frac{a_{min}}{2}\left|\partial_t u(t)\right|_{\mathcal{X}}^2 \leq \varepsilon_0 \qquad \forall t \in [0, T_{max}[. \tag{32}$$

Existence globale

$$H_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\left|\partial_t^2 u_{nj}(t)\right|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\beta_{u_{nj}}(t)\left|\partial_x \partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2,$$

$$\frac{1}{2}\left|\partial_t^2 u(t)\right|_{\mathcal{X}}^2 + \frac{a_{min}}{2}\left|\partial_t u(t)\right|_{\mathcal{X}}^2 \leq \varepsilon_0 \qquad \forall t \in [0, T_{max}[. \qquad (32)$$

Alors on conclut que la solution u est globale.

Existence globale

$$H_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\left|\partial_t^2 u_{nj}(t)\right|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\beta_{u_{nj}}(t)\left|\partial_x \partial_t u_{nj}(t)\right|_0^2,$$

$$\frac{1}{2}\left|\partial_t^2 u(t)\right|_{\mathcal{X}}^2 + \frac{a_{min}}{2}\left|\partial_t u(t)\right|_{\mathcal{X}}^2 \leq \varepsilon_0 \qquad \forall t \in [0, T_{max}[. \qquad (32)$$

Alors on conclut que la solution u est globale.

$$\lim_{t \to T_{max}} \left(|u(t)|_{V \cap \mathcal{H}} + |\dot{u}(t)|_V\right) = +\infty$$

Existence globale

$$H_n(t) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \left| \partial_t^2 u_{nj}(t) \right|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \beta_{u_{nj}}(t) \left| \partial_x \partial_t u_{nj}(t) \right|_0^2,$$

$$\frac{1}{2} \left| \partial_t^2 u(t) \right|_{\mathcal{X}}^2 + \frac{a_{min}}{2} \left| \partial_t u(t) \right|_{\mathcal{X}}^2 \leq \varepsilon_0 \qquad \forall t \in [0, T_{max}[. \qquad (32)$$

Alors on conclut que la solution u est globale.

$$\lim_{t \to T_{max}} \left(|u(t)|_{V \cap \mathcal{H}} + |\dot{u}(t)|_V \right) = +\infty$$

De plus, u satisfait les estimations (20) et (22) sur $[0, +\infty[$.

Décroissance de l'énergie

Lemma

Il existe une constante postive C, ne dépend que des données initiales, telle que $\forall\ 0 \leq S \leq T$, on a

$$\int_S^T E(s)ds \leq C\,E(S). \tag{33}$$

Décroissance de l'énergie

$\forall j = 1, \ldots, N$

$$\frac{d}{dt}\langle \partial_t u, (x - l_j)\nabla u\rangle \leq \frac{-1}{4}E(t) + \frac{L}{2}\left(N + \frac{M^2}{a_{min}}\right)\partial_t u_1(0,t)^2 + c_0|u(t)|_{\mathcal{X}}^2, \tag{34}$$

Décroissance de l'énergie

$\forall j = 1, \ldots, N$

$$\frac{d}{dt}\langle \partial_t u, (x - l_j)\nabla u\rangle \leq \frac{-1}{4}E(t) + \frac{L}{2}\left(N + \frac{M^2}{a_{min}}\right)\partial_t u_1(0,t)^2 + c_0|u(t)|_X^2, \tag{34}$$

$$c_0 = 8\,\left(C_p^{(q-1)}L\right)^2.$$

Décroissance de l'énergie

$\forall j = 1, \dots, N$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \partial_t u, (x - l_j)\nabla u \right\rangle \leq \frac{-1}{4}E(t) + \frac{L}{2}\left(N + \frac{M^2}{a_{min}}\right)\partial_t u_1(0,t)^2 + c_0|u(t)|_X^2, \tag{34}$$

$$c_0 = 8\left(C_p^{(q-1)}L\right)^2.$$

$$\int_S^T \frac{d}{dt}\left\langle \partial_t u, (x - l_j)\nabla u \right\rangle dt \leq \frac{-1}{4}\int_S^T E(t)dt + \int_S^T c_0|u(t)|_X^2 dt + \frac{L}{2}\left(N + \frac{M^2}{a_{min}}\right)\int_S^T \partial_t u_1(0,t)^2 dt. \tag{35}$$

Décroissance exponentielle de l'énergie

Lemma

Il existe $T_0 > 0$ *tel que si* $T \geq T_0$ *alors* $\forall\ 0 \leq S \leq T$*, il existe* $C > 0$ *tel que* $\forall\ (u^0, u^1) \in W \cap \mathcal{H}$ *vérifiant*

$$\alpha := \frac{\mu_{max} C_p^{q+1}}{a_{min}^q} \left[\frac{2(q+1)}{(q-1)} E(0) \right]^{q-1} < 1,$$

on a:

$$\int_S^T |u(t)|_X^2 dt \leq C \int_S^T \left(|\partial_t u_1(0,t)|^2 + |g\left(\partial_t u_1(0,t)\right)|^2 \right) dt. \quad (36)$$

Décroissance exponentielle de l'énergie

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, on considère la fonctionelle

$$Q(t) = E(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \langle \partial_t u_j(t), (x - l_j) \partial_x u_j(t) \rangle$$

Décroissance exponentielle de l'énergie

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, on considère la fonctionelle

$$Q(t) = E(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \langle \partial_t u_j(t), (x - l_j)\partial_x u_j(t) \rangle$$

$Q(t)$ satisfait :

$$|Q(t)| \leq q_1' \, E(t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{37}$$

Décroissance exponentielle de l'énergie

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, on considère la fonctionelle

$$Q(t) = E(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \langle \partial_t u_j(t), (x - l_j)\partial_x u_j(t) \rangle$$

$Q(t)$ satisfait :

$$|Q(t)| \leq q_1' \, E(t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{37}$$

avec

$$q_1' := \max\left(2, \frac{(q+1)L^2}{a_{min}(q-1)}\right).$$

Décroissance exponentielle de l'énergie

En sommant (24) et (34) et en intégrant sur $[S, T]$, on obtient :

Décroissance exponentielle de l'énergie

En sommant (24) et (34) et en intégrant sur $[S, T]$, on obtient :
Pour ε assez petit,

$$\int_S^T E(t)dt \leq C\,E(S)$$

Décroissance exponentielle de l'énergie

En sommant (24) et (34) et en intégrant sur $[S, T]$, on obtient :
Pour ε assez petit,

$$\int_S^T E(t)dt \leq C\, E(S)$$

où

$$C = 4\, max\left(2, \frac{2(q+1)}{a(q-1)}\right).$$

- R. Adams, *Sobolev Spaces,* Academic Press. New York San Francisco London 1975.
- V. Barbu, *Nonlinear Differential Equation of Monotone Types in Babach Spaces,* Springer Monographs In Mathematics.
- L. Boccardo and G. Croce, *Elliptic Partial Differential Equations,* Studies in Mathematics 55. DE GRUYTER
- H. Brezis, *Analyse Fonctionelle Théorie et Applications,* Masson 1983.
- E. Cabanillas L, V.E.Carrera B, F.Leon B and Z.Huaringa S, *Global Existence for the Kirchhoff Equation with Nonlinear Boundary Dissipation and Source Term,* Intenational Journal of Nonlinear Science 2011.
- S. Dragomir, *Some Gromwall Type Inequalities and Applications,*
- I. Lasiecka and J. Ong, *Global solvability and uniform decays of solutions of quasilinear equation with non linear boundary dissipation,* Comm.Part. Diff. Eq (1999).
- J.L.Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires,* DUNOD-Gauthier VILLARS.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION!