On nonlocal elliptic problems with critical growth

Safia BENMANSOUR

Ecole supérieure de management de Tlemcen

On étudie la multiplicité des solutions pour le problème elliptique du type Kirchhoff:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -(a\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + b)\Delta u = f + |u|^4 u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, a, b sont des constantes positives et f satisfaisant certaines conditions.

$(\mathcal{P}_\lambda)$ est un problème non local. C'est une version stationnaire du modèle:

$$\begin{cases} u_{tt} - (a\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + b) \triangle u = h(x,u) & \text{dans } \Omega \times (0,\ T), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,\ T), \\ u(x,\ 0) = u_0(x),\ u_t(x,\ 0) = u_1(x), & \end{cases}$$

qui est une généralisation du modèle initialement proposé en dimension une par Kirchhoff en 1883:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\rho_0 + \rho_1 \int_0^L \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| dx)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

qui lui même est une extension de l'équation des ondes de D'Alembert. Kirchhoff y a pris en compte les changements qu'occasionnent les oscillations transversales sur la longueur du fil.

On étudie l'existence et la multiplicité des solutions pour le problème:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -(a\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + b)\Delta u = |u|^4 u + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^3$, a, b des constantes positives et f appartient à H^{-1} satisfaisant la condition:

$$(\mathcal{H}) \quad \left|\int fv\right| < K_a(v), \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } |v|_6 = 1$$

où

$$\begin{aligned} K_a(v) \quad : \quad &= 10^{-5/2}[12a^2||v||^8 + 80b||v||^2 + 4a||v||^4 A_a(v)] \\ &[3a||v||^4 + A_a(v)]^{1/2} \end{aligned}$$

avec $A_a(v) := ||v|| \left(9a^2||v||^6 + 20b\right)^{1/2}$.
$||.||$ et $|.|_6$ sont les normes dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^6(\Omega)$ respectivement.

Dans le cas d'un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$, pour $a = 0$, $b = 1$, Tarantello a étudié:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{4(N-2)} u + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et a montré sous une bonne condition sur f, l'existence d'au moins deux solutions.

Nos principaux résultats sont;

Theorem

Supposons que $f \neq 0$ *satisfait* $(\mathcal{H})$. *Alors le problème* $(\mathcal{P})$ *admet au moins une solution faible dans* $H_0^1(\Omega)$.

Theorem

Sous l'hypothèse du théorème précédent et pour a *un nombre positif petit, le problème* $(\mathcal{P})$ *admet au moins deux solutions dans* $H_0^1(\Omega)$.

On définit la fonctionnelle d'énergie correspondant à $(\mathcal{P})$ par:

$$I_a(u) = \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{6}|u|_6^6 - \int fu, \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

I_a est bien définie, de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et ses points critiques sont des solutions faibles de $(\mathcal{P})$ i.e. ils satisfont:

$$\left(a||u||^2 + b\right)\int \nabla u \nabla v - \int |u|^4 uv - \int fv = 0, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

I_a n'étant pas bornée inférieurement sur H, on introduit la variété de Nehari définie par:

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} : \left\langle I_a'(u),\ u \right\rangle = 0 \right\}.$$

Soit $h_u(t) = I_a(tu)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$ et $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$.
On décompose $\mathcal{N}$ en trois sous ensembles:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ \quad &: \quad = \left\{ u \in \mathcal{N} \colon h_u''(1) > 0 \right\}, \\ \mathcal{N}^0 \quad &: \quad = \left\{ u \in \mathcal{N} \colon\ h_u''(1) = 0 \right\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{N}^- := \left\{ u \in \mathcal{N} :\ h_u''(1) < 0 \right\},$$

où $h_u''(t) = -5|u|_6^6 t^4 + 3a||u||^4 t^2 + b||u||^2$.

Les lemmes suivants jouent un role important dans notre travail.

Lemma

La fonctionnelle I_a est coercive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}$.

Lemma

Si f satisfait $(\mathcal{H})$, alors $\mathcal{N}^0 = \emptyset$.

Lemma

Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H})$ vérifiée. Alors, pour tout $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, il existe trois uniques valeurs $t_1^+ = t_1^+(u)$, $t^- = t^-(u) \neq 0$ et $t_2^+ = t_2^+(u)$ telles que:

i) $t_1^+ < -t_{a,\max}^u$, $t_1^+ u \in \mathcal{N}^-$, et $I_a(t_1^+ u) = \max\limits_{t \leq -t_{a,\max}^u} I_a(tu)$,

ii) $-t_{a,\max}^u < t^- < t_{a,\max}^u$, $t^- u \in \mathcal{N}^+$ et $I_a(t^- u) = \min\limits_{|t| \leq t_{a,\max}^u} I_a(tu)$,

iii) $t_2^+ > t_{a,\max}^u$, $t_2^+ u \in \mathcal{N}^-$ et $I_a(t_2^+ u) = \max\limits_{t \geq t_{a,\max}^u} I_a(tu)$.

Définissons

$$c_0 = \inf_{v \in \mathcal{N}^+} I_a(v) \ \text{ et } \ c_1 = \inf_{v \in \mathcal{N}^-} I_a(v).$$

De plus $c_0 = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}} I_a(u)$.

Lemma

Soit f vérifiant $(\mathcal{H})$, alors il existe des suites minimisantes $(u_n) \subset \mathcal{N}^+$ et $(v_n) \subset \mathcal{N}^-$ telles que
i) $I_a(u_n) < c_0 + \frac{1}{n}$ et $I_a(w) \geq I_a(u_n) - \frac{1}{n}\|w - u_n\|$ pour tout $w \in \mathcal{N}^+$.
ii) $I_a(v_n) < c_1 + \frac{1}{n}$ et $I_a(w) \geq I_a(v_n) - \frac{1}{n}\|w - v_n\|$ pour tout $w \in \mathcal{N}^-$.

On prouve que $c_0 < 0$. En effet en considèrant $(u_n) \subset \mathcal{N}^+$ la suite minimisante obtenue dans le lemme précédent, on a les estimations:

$$I_a(u_n) < c_0 + \frac{1}{n} \leq -\frac{b}{3} t_0^2 \|f\|_-^2 ,$$

ce qui implique que

$$\int f u_n \geq \frac{2}{5} b t_0^2 \|f\|_-^2 > 0,$$

et

$$\frac{2}{5} b t_0^2 \|f\|_- \leq \|u_n\| \leq \frac{5}{2b} \|f\|_- .$$

Lemma

Soit f verifiant $(\mathcal{H})$, alors $\|I_a'(u_n)\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite (u_n) étant bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on a: $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors $\langle I_a'(u_0), w\rangle = 0$, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ en particulier pour $w = u_0$, on conclut que $u_0 \in \mathcal{N}$ est une solution faible de $(\mathcal{P})$.
Du fait que $\int fu_n \geq \frac{2}{5} bt_0^2 \|f\|_{-}^{2} > 0$, on déduit que $\int fu_0 > 0$, alors $u_0 \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
c_0 &\leq I_a(u_0) = \frac{a}{12}\|u_0\|^4 + \frac{b}{3}\|u_0\|^2 - \frac{5}{6}\int fu_0 \\
&\leq \varliminf_{n\to\infty} I_a(u_n) = c_0,
\end{aligned}
$$

d'où $c_0 = I_a(u_0)$. Il s'en suit que (u_n) converge fortement vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ et nécessairement $u_0 \in \mathcal{N}^{+}$.

On détermine un bon niveau de la condition de Palais-Smale. S étant la meilleure constante de Sobolev, elle est atteinte dans $\mathbb{R}^3$ par

$$U_{\varepsilon,x_0}(x) = \varepsilon^{1/2}\left(\varepsilon^2 + |x - x_0|^2\right)^{-1/2}.$$

Lemma

Soit f vérifiant $(\mathcal{H})$, alors I_a satisfait la condition de (P-S)$_c$ pour

$$c < c^* = \frac{ab}{4}S^3 + \frac{a^3}{24}S^6 + \frac{b}{6}SE_1 + \frac{a^2}{24}S^4E_1 + c_0,$$

où $E_1 = \left(a^2S^4 + 4bS\right)^{1/2}.$

Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi(x) = 1$ pour $x \in B_{x_0}^r$, $\phi(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^3 \backslash B_{x_0}^{2r}$, $0 \le \phi \le 1$ et $|\nabla \phi| \le C$.
Posons $u_{\varepsilon,x_0} = \phi U_{\varepsilon,x_0}$.
Les estimations suivantes sont données dans de (B-N) quand ε tend vers 0 :

$$|u_{\varepsilon,x_0}|_6^6 = A + O\left(\varepsilon^3\right), \text{ et } \left\|u_{\varepsilon,x_0}\right\|^2 = B + O\left(\varepsilon\right),$$

où

$$A = \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |x - x_0|^2\right)^{-6}, \text{ et } B = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U_{1,x_0}(x)|^2,$$

on a à partir de (T): $\int u_{\varepsilon,x_0}^5 u_0 = O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right)$.
Proposition: Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est vérifiée, il existe alors a_0 et ε_0 suffisamment petits tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $0 < a < a_0$, on ait $I_a\left(u_0 + t u_{\varepsilon,x_0}\right) < c^*$ pour tout $t > 0$.

A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

C.O. Alves, F J.S.A. Correa, T.F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Comput. Math. Appl. 49 (2005) 85-93.

S. Benmansour, M. Bouchekif, Nonhomogeneous elliptic Kirchhoff type problems involving critical Sobolev exponent, Electon. J. Diff. Equ. vol. 2015 (2015), No. 69, pp. 1-11.

- H. Brezis, L. Nirenberg, Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.
- S. J. Chena, L. Li, Multiple solutions for the nonhomogeneous Kirchhoff equation on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis: Real World Applications 14 (2013) 1477-1486.
- P. Drábek, S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (1997) 703-726.
- I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 324-353.
- G. Kirchhoff, Mechanik. Teubner. Leipzig (1883).

- H.L. Lin, Positive solutions for nonhomogeneous ellptic equations involving critical Sobolev exponent, Nonlinear Anal. 75 (2012) 2660-2671.
- J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations in: North-Holland Math. Stud. vol. 30. North-Holland. Amsterdam.(1978) 284-346.
- F. Li, Y. Li, J. Shi, Existence of positive solutions to Kirchhoff type problems with zero mass, J. Math. Anal. Appl. 410 (2014) 361-374.

G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976) 353-372.

G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Nonlinéaire 9 (1992) 281-304.

X. Wu, Exitence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2011) 1278-1287.